Université de Grenoble Alpes **Année 2016-2017**
Licence de mathématiques, 3e année **Topologie, parcours B**

Contrôle continu du 30 novembre 2016

Durée : 1h30
Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.

Question de cours (6 points)

1. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ (l'adhérence de F) est un sous-espace vectoriel de E qui contient F.
2. Montrer que l'ensemble $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_i| \leqslant 1, i = 1, \ldots, n\}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.
3. Montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
4. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que toutes les fonctions linéaires de E dans F sont continues.

Exercice 1 (3 points)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si x=y.} \end{cases}$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Rappel (théorème des accroissements finis) : une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie l'assertion suivante. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$ il existe $c \in]x, y[$ tel que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$.

Exercice 2 (3 points)

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice $n \times n$ inversible. On note $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application définie par $N_A(x) = \|Ax\|$ définit une norme équivalente à $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et f une bijection linéaire continue de E sur E, dont l'inverse est également continu (f est un automorphisme de E et un homéomorphisme de E sur E). Montrer que l'application définie par $N_f(x) = N(f(x))$ définit une norme équivalente à N sur E.

Exercice 3 (8 points)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et T une forme linéaire sur E (application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$). On suppose dans toute la suite que $T \neq 0$.

1. On suppose qu'il existe une boule ouverte de E dont l'image est bornée dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'image de la boule de même rayon centrée en l'origine est également bornée.
   En déduire que T est continue.
2. Soit $x \in E$ et $r > 0$ tels que $\forall y \in B(x, r)\ T(y) > 0$. Montrer que $2x - y \in B(x, r)$ et en déduire : $\forall y \in B(x, r)\ T(y) < 2T(x)$.
3. Un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel strict de E maximal pour l'inclusion (ce qui signifie que, si V est une sous-espace vectoriel de E qui contient H mais qui n'est pas égal à H, alors $V = E$).
   Montrer qu'un hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E.
4. Montrer que T est surjective et que le noyau $\operatorname{Ker} T$ est un hyperplan de E.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est dense dans E si et seulement si T n'est pas continue.